Analyse Complexe
TD 8
Fonctions spéciales

Exercice 1 Prouver que toute fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ est le quotient de deux fonctions entières.

Exercice 2 (*) Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer qu'il y autant de façons d'écrire n comme somme d'entiers strictement positifs *distincts* que de façons d'écrire n comme somme d'entiers positifs *impairs*.

Exercice 3 Cet exercice traite de quelques propriétés remarquables de la fonction Γ.

1. Montrer que
$$(\Gamma'/\Gamma)'(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(z+n)^2}$$
pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$,
$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n\geq 1} \frac{(1+1/n)^z}{1+z/n} = \lim_{N\to+\infty} \frac{N^z N!}{z(z+1)\dots(z+N)}.$$
3. A l'aide de la question précédente, montrer que la fonction Γ satisfait les équations
$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/k)\dots\Gamma(z+(k-1)/k) = (2\pi)^{(k-1)/2} k^{1/2-kz}\Gamma(kz),$$
pour tout entier $k \geq 2$.
4. (*) Soit f une fonction holomorphe sur $U = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 0\}$. On suppose que $f(z+1) = zf(z)$ pour tout z, que f est bornée sur la bande $\{z \in \mathbb{C}, 1 \leq \mathrm{Re}(z) < 2\}$ et que $f(1) = 1$. Montrer que $f = \Gamma$ sur U.
5. A l'aide de la question précédente redémontrer que la fonction Γ satisfait les équations
$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{k})\Gamma(z+\frac{2}{k})\dots\Gamma(z+\frac{k-1}{k}) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(k-1)} k^{\frac{1}{2}-kz}\Gamma(kz)$$
pour tout entier $k \geq 2$.
On pourra utiliser la question précédente !

Exercice 4 Soit $\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$. On rappelle que ξ est entière et qu'elle vérifie l'équation fonctionnelle $\xi(1-s) = \xi(s)$.

1. Montrer qu'il existe une fonction entière f telle que $\xi(s+1/2) = f(s^2)$.
2. Montrer que si $\mathrm{Re}(s) > 0$ et $s \neq 1$,
$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx$$
où $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire de x. En déduire que la fonction ξ est d'ordre inférieur ou égal à 1.
3. Montrer qu'une fonction entière dont l'ordre est fini et n'est pas entier admet une infinité de zéros.
4. En déduire que la fonction ζ a une infinité de zéros dans la bande $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$.

Exercice 5 Soient α, β des complexes non colinéaires, $\Lambda = \alpha\mathbb{Z} \oplus \beta\mathbb{Z}$ le réseau correspondant. Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, non constante, Λ-périodique (cela signifie par définition que f est à la fois α-périodique et β-périodique).

1. Montrer qu'il existe un complexe z_0 tel que f n'a ni zéros ni pôles sur le bord du parallélogramme
$$\{z_0 + x\alpha + y\beta \mid 0 \leq x, y \leq 1\},$$
et montrer que f a autant de zéros que de pôles, comptés avec multiplicités, à l'intérieur de celui-ci.
2. Si S est une partie finie de $\mathbb{C}$ et $n \geq 1$ un entier, montrer que l'ensemble des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$, Λ-périodiques et dont les pôles sont tous dans $S + \alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ et tous d'ordre $\leq n$, est un espace vectoriel complexe de dimension finie.
3. Montrer que lorsque S n'a qu'un élément et $n = 1$, on obtient seulement les fonctions constantes.
On pourra comparer f' et f^2.
4. Montrer que
$$\frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \left(\frac{1}{(z - m\alpha - n\beta)^2} - \frac{1}{(m\alpha + n\beta)^2} \right)$$
converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus (\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z})$ vers une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, Λ-périodique. Cette fonction est la célèbre fonction $\wp$ de Weierstrass.

Exercice 6 On reprend les notations de l'exercice précédent.

1. (*) Soit f une fonction méromorphe non identiquement nulle sur $\mathbb{C}$, Λ-périodique. Soit $\{z_1, \ldots, z_k\}$ un ensemble de représentants modulo Λ de l'ensemble formé des zéros et des pôles de f, m_i l'ordre du zéro ou du pôle de f en z_i. On a vu dans l'exercice précédent que $\sum_i m_i = 0$. Montrer qu'on a aussi :
$$\sum_{i=1}^{k} m_i z_i \in \Lambda.$$
2. Réciproquement, on se donne $\{z_1, \ldots, z_k\} \subset \mathbb{C}$ distincts modulo Λ, et des entiers $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{Z}$ tels que :
$$\sum_{i=1}^{k} m_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{k} m_i z_i = 0.$$
On va montrer qu'il existe une fonction méromorphe f comme dans la question précédente.
   (a) Montrer que le produit de Weierstrass
   $$\sigma(z) = z \prod_{\lambda\in\Lambda\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right) e^{z/\lambda + z^2/2\lambda^2}$$
   définit une fonction entière σ dont l'opposé de la dérivée logarithmique $\xi := -\sigma'/\sigma$ vérifie
   $$\xi' = \wp,$$
   $\wp$ étant la fonction de Weierstrass introduite dans l'exercice précédent.
   (b) Montrer qu'il existe des nombres complexes t_α, t_β tels que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$,
   $$\xi(z + \alpha) = \xi(z) + t_\alpha \text{ et } \xi(z + \beta) = \xi(z) + t_\beta.$$
   (c) Montrer qu'il existe $C_\alpha, C_\beta \in \mathbb{C}^\times$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$,
   $$\sigma(z + \alpha) = C_\alpha \sigma(z) e^{-t_\alpha z} \text{ et } \sigma(z + \beta) = C_\beta \sigma(z) e^{-t_\beta z}.$$
   (d) Montrer que la fonction
   $$f(z) = \prod_{i=1}^{k} \sigma(z - z_i)^{m_i}$$
   convient.